Universidade de São Paulo

Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de

Ribeirão Preto Departamento de Física

Momento de Inércia

Kassandra Kally Oliveira Santana N° USP: 16879942

Prof. Luciano Bachmann

Ribeirão Preto, Março de 2026

1. Introdução

O movimento rotacional de corpos rígidos pode ser descrito por grandezas análogas às do movimento translacional, sendo o momento de inércia o parâmetro que desempenha papel equivalente ao da massa. Essa grandeza depende da distribuição da massa em relação ao eixo de rotação e determina a resistência do corpo à variação de sua velocidade angular.

Matematicamente, para uma partícula pontual, o momento de inércia é dado por:

$$I = r^2m$$

Quando se fala de inércia, estamos tratando de uma grandeza aditiva, pois o momento de inércia de um sistema formado por corpos rígidos que é a soma dos momentos de inércia de cada um deles individualmente somados, permitindo encontrar o momento de inércia de corpos contínuos através da seguinte expressão:

$$I = \int r^2dm$$

Dessa forma é possível determinar experimentalmente o momento de inércia de um disco e de uma placa, desde que se obtenha previamente o R do disco, uma massa suspensa em uma determinada altura. Também se faz necessário a utilização de detectores que acionam/travam a contagem de tempo no cronômetro C, separados por uma distância h.

Já nesse caso o momento de inércia é dado por:

$$I = ID + IP$$

sendo I o momento de inércia do conjunto disco-placa, ID o momento de inércia do disco e, IP o momento de inércia da placa quadrada. O movimento da massa m faz com que o sistema disco-placa gire, com atrito, em torno de um eixo perpendicular ao seu plano e que passa pelo seu centro. Soltando a massa a partir do repouso ela percorre uma distância h em um intervalo de tempo t. Medindo-se o valor de t e de h pode-se calcular a aceleração a do corpo com a seguinte fórmula:

$$a = 2h/t2$$

Tendo o valor da aceleração linear, pode-se utilizar a expressão abaixo conseguida a partir da Lei Fundamental do Movimento de Rotação, para relacionar o momento de inércia (I) e o torque de atrito (τA):

$$m(g - a) = aI/R^2 + \tau A/R$$

O torque, ou momento de uma força, é a grandeza responsável por produzir rotação em um corpo, sendo perpendicular ao plano definido pela força e pelo raio de rotação. O atrito, decorrente do contato entre superfícies, origina um torque que se opõe ao movimento rotacional do sistema.

Na equação apresentada, m representa a massa suspensa, g a aceleração da gravidade, a a aceleração linear da massa, τA o torque de atrito, I o momento de inércia do disco ou do conjunto disco–placa e R o raio do disco.

2. Resultados e discussões

Fórmulas utilizadas:

Propagação de incertezas (TAYLOR, John R. 1997, pág 212) **(1)**

$$\sigma_q^2 = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2$$

Fórmula do coeficiente angular (TAYLOR, John R. 1997, pág. 184) **(2)**

$$B = \frac{N \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\Delta}$$

Tendo o valor da aceleração linear **(3)**

$$m(g - a) = aI/R^2 + \tau A/R$$

Relação do momento de inércia e o torque de atrito **(4)**

$$a = 2h/t^2$$

Momento de inécia Disco Placa **(5)**

$$I = ID + IP$$

momento de inércia de corpos contínuos **(6)**

$$I = \int r^2 dm$$

Fórmula do momento inércia para uma barra delgada (Raymond A. Serway. 1986, pág. 202) **(7)**

$$I_c = \frac{m(h^2 + w^2)}{12}$$

Fórmula do momento inércia para um cilindro maciço (WALKER, Jearl. 2016, pág. 270-273) **(8)**

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Tabela 1. Parâmetros físicos do disco e da placa.

Características do disco			
Massa (kg)	Raio (m)	Espessura (m)	Altura (h)
0,4255 ± 0,00059	0,0432 ±0,00005	0,00825 ±0,00005	0,982 ±0,0005
Características da placa			
Massa (kg)	Espessura (m)	Largura (m)	Comprimento (m)
0,16451 ± 0,00059	0,017± 0,00005	0,753 ± 0,00005	0,489 ± 0,0005

Fonte: A autora

Tabela 2. Dados experimentais, grandezas e incertezas calculadas para o sistema com o disco (parte 1).

Disco							
m(kg)	t1(s)	t2(s)	t3(s)	t4(s)	t5(s)	Tmédio	a(m/s^2)
0,021	1,428	1,487	1,491	1,470	1,423	1,460	0,922
0,041	0,976	1,001	0,978	1,008	1,010	0,995	1,985
0,058	0,820	0,856	0,822	0,830	0,842	0,834	2,824
0,069	0,782	0,778	0,791	0,795	0,803	0,790	3,149
0,080	0,720	0,759	0,750	0,736	0,738	0,741	3,581
0,092	0,709	0,711	0,718	0,731	0,702	0,714	3,850
0,107	0,652	0,674	0,656	0,639	0,665	0,657	4,547
0,119	0,617	0,632	0,600	0,647	0,623	0,624	5,047

Fonte: A autora

Tabela 2. Dados experimentais, grandezas e incertezas calculadas para o sistema com o disco (continuação da tabela acima).

Disco				
Incerteza de a (m/s^2)	a/R^2 (1/(m·s^2))	Incertezas de a/R^2 (1/(m·s^2))	m(g-a) (N)	Incertezas de m(g-a) (N)
0,001	494	1	0,186	0,009
0,004	1064	3	0,320	0,008
0,007	1513	5	0,405	0,007
0,008	1687	6	0,459	0,007
0,010	1919	7	0,498	0,006
0,011	2063	8	0,547	0,006
0,014	2437	9	0,562	0,005
0,016	2704	11	0,566	0,005

Fonte: A autora

Tabela 3. Dados experimentais, grandezas e incertezas calculadas para o sistema com o disco e placa (parte 1).

Disco e placa							
m(kg)	t1(s)	t2(s)	t3(s)	t4(s)	t5(s)	Tmédio	a(m/s^2)
0,021	2,596	2,551	2,237	2,297	2,283	2,393	0,343
0,041	1,304	1,412	1,310	1,369	1,197	1,318	1,130
0,058	0,968	0,993	0,969	0,958	0,948	0,967	2,099
0,069	0,901	0,898	0,896	0,900	0,897	0,898	2,433
0,080	0,814	0,839	0,840	0,830	0,888	0,842	2,769
0,093	0,825	0,801	0,818	0,839	0,835	0,824	2,895
0,107	0,692	0,755	0,715	0,741	0,719	0,724	3,743
0,119	0,718	0,700	0,701	0,702	0,705	0,705	3,949

Fonte: A autora

Tabela 3. Dados experimentais, grandezas e incertezas calculadas para o sistema com o disco e placa (continuação da tabela acima).

Disco e placa				
Incerteza de a (m/s^2)	a/R^2 (1/(m·s^2))	Incertezas de a/R^2 (1/(m·s^2))	m(g-a) (N)	Incertezas de m(g-a) (N)
0,000	184	0	0,199	0,009
0,002	605	2	0,355	0,009
0,004	1125	4	0,447	0,008
0,006	1304	4	0,508	0,007
0,007	1484	5	0,562	0,007
0,007	1551	5	0,642	0,007
0,011	2005	7	0,648	0,006
0,011	2116	8	0,696	0,006

Fonte: A autora

2.1 Cálculo do valor do momento de inércia para o disco e para a placa usando as medidas de massa e as dimensões de cada um destes corpos

Para o disco maciço: $Id = ½\ m*r^2$. Onde:

- m = massa do disco.
- r = raio do disco.

Dessa forma:

$Id = ½\ 0{,}42550 \times 0{,}04320^2$

$Id = 3{,}970 \times 10\text{^-4 kg}\times m^2$

Já para a placa: $Ip = \frac{1}{12} m(L^2 + C^2)$. Onde:

- m = massa da placa.
- L = largura.
- C = comprimento.

Dessa forma:

$Ip = 1/12\ 0{,}16451(0{,}07530^2 + 0{,}04890^2)$

$Ip = 6{,}630 \times 10^{-4}\ kg\times m^2$

Momento inércia do sistema:

$I_{total} = Id + Ip$

$I_{total} = 3{,}970 \times 10^{-4} + 6{,}630 \times 10^{-4}$

$I_{total} = 1{,}060 \times 10^{-3}\ \ kg \times m^2$

Através da propagação de erros utilizando derivadas parciais das expressões do momento de inércia, obtém-se:

$Id = (3{,}970 \pm 0{,}011) \times 10^{-4}\ kg \times m^2$

$Ip = (6{,}630 \pm 0{,}002) \times 10^{-4}\ kg \times m^2$

$I_{total} = (1{,}060 \pm 0{,}001) \times 10^{-3}\ kg \times m^2$

2.2 Gráficos m(g-a) versus a/R² e valores de τA e *I*

A equação que descreve a dinâmica do sistema é:

$m(g - a) = (I/R^2)a + tA/R$

Onde m é a massa suspensa, g é a aceleração da gravidade, a é a aceleração do sistema, I é o momento de inércia do corpo em rotação, R é o raio do disco e τA é o torque de atrito.

Comparando essa expressão com a equação de uma reta y = A x + B, faz-se a seguinte identificação:

$y = m(g - a)$

$x = a/R^2$

Substituindo, obtém-se:

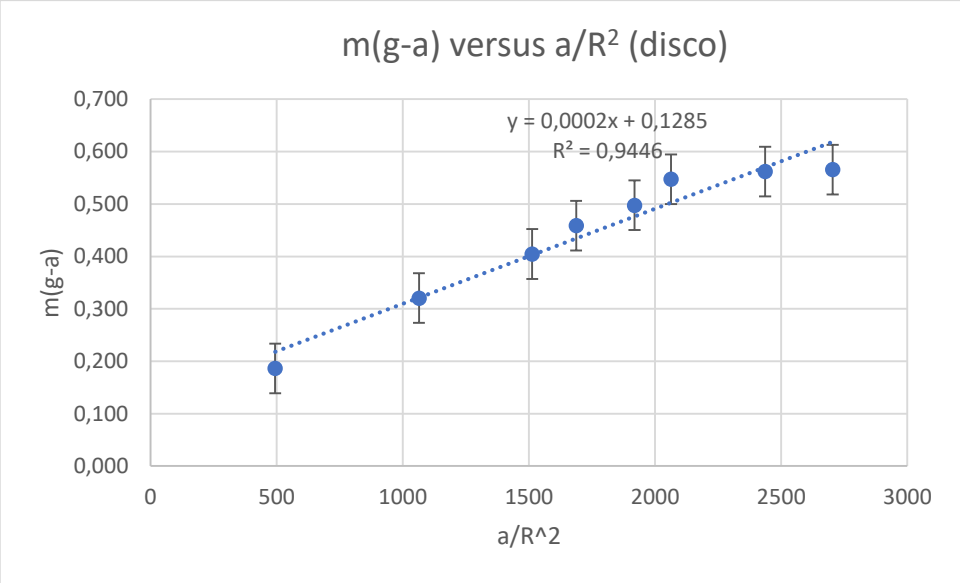
$y = I*x + \tau A/R$

Assim, a inclinação da reta corresponde ao momento de inércia do sistema, *I* = inclinação.

Enquanto o intercepto corresponde ao termo tA/R, de modo que o torque de atrito pode ser obtido por, τA = (intercepto) R

Então, para o disco isolado:

Gráfico 1. Gráfico de m(g−a) em função de a/R^2 para o sistema utilizando apenas o disco, com ajuste linear dos dados experimentais.



Fonte: A autora

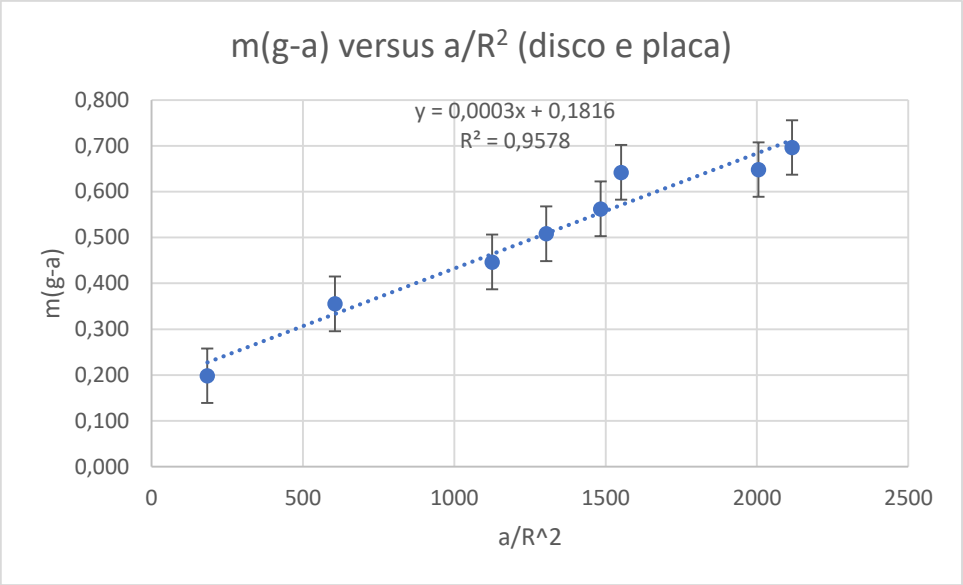
Id = 0,0002kg×m^2

τA = 0,1285 × 0,0432

τA = 5,56 × 10^{-3} N*m

Já para o disco + placa:

Gráfico 2. Gráfico de m(g−a) em função de a/R^2 para o sistema utilizando disco e placa, com ajuste linear dos dados experimentais.



Fonte: A autora

Itotal = 0,0003 kg×m^2

τA = 0,1816 × 0,0432

τA = 7,85 × 10^{-3} N*m

2.3 Os valores de τA são diferentes para cada um dos casos? Justifique.

Na teoria, não deveriam ser muito diferentes. O torque de atrito τA está associado principalmente ao atrito no eixo de rotação do sistema (contato entre o eixo e os suportes ou rolamentos). Como o eixo é o mesmo tanto para o disco quanto para o conjunto disco + placa, espera-se que o valor de τA seja aproximadamente o mesmo nos dois casos. No entanto, no experimento foram obtidos valores diferentes para τA.

Essa diferença pode ser explicada por fatores experimentais, como incertezas na medida do tempo, pequenas variações no atrito do eixo durante cada medida, possíveis oscilações da massa suspensa e imprecisões na determinação da aceleração. Além disso, pequenas diferenças no alinhamento do sistema ou no enrolamento do fio também podem alterar ligeiramente o atrito efetivo.

2.4 Compare e discuta os resultados obtidos mediante a definição e as medidas geométricas dos corpos e aqueles obtidos ao aplicar as equações da dinâmica da rotação.

Os valores do momento de inércia obtidos a partir das dimensões geométricas dos corpos apresentaram diferenças consideráveis em relação aos valores obtidos experimentalmente por meio das equações da dinâmica da rotação. A partir do ajuste linear do gráfico, pode-se perceber que o momento de inércia feito experimentalmente foi menor do que o valor previsto teoricamente. Mesmo levando em conta as incertezas associadas às medições, os resultados são incompatíveis. Essa diferença pode estar relacionada a incertezas nas medidas de tempo, pequenas imprecisões nas dimensões dos corpos e possíveis variações no atrito do sistema. Além disso, pode ter ocorrido perdas de energia associadas ao movimento do fio e ao contato no eixo de rotação. Ademais, deve-se considerar também que o modelo teórico assume condições ideais, enquanto o sistema experimental real está sujeito a imperfeições que podem influenciar os resultados obtidos.

2.5 O que seria esperado acontecer se aumentarmos a espessura da placa?

Caso a espessura da placa aumente, sua massa também irá aumentar, o que resultará em um aumento do momento de inércia do sistema. Dessa forma, a aceleração do sistema vai diminuir, observando o gráfico 1, $m(g-a)$ versus a/R^2 haveria um aumento do coeficiente angular da reta, indicando um aumento do momento de inércia.

2.6 O que seria esperado acontecer se no lugar de uma placa retangular usarmos outro disco com a mesma massa e a mesma área superficial da placa? (Dica: tente ver cada um dos casos em um gráfico 3D)

Se trocarmos a placa por outro disco com a mesma massa e a mesma área superficial da placa o momento de inércia do sistema diminuiria, pois no disco a massa tende a ficar mais próxima do eixo de rotação do que em uma

placa retangular. Dessa forma, a aceleração do sistema aumenta e o coeficiente angular do gráfico 2 seria menor. Observe isso na diferença de coeficiente angular do gráfico 1 (somente o disco, coeficiente angular =0,0002) e 2 (disco + placa, coeficiente angular = 0,0003).

3. Referências

[1] HELERBROCK, Rafael. *Torque*. Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/fisica/torque-uma-forca.htm. Acesso em: 03 mar. 2026.

[2] FARACO, Carlos. *Força de atrito*. Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/fisica/forca-atrito.htm. Acesso em: 03 mar. 2026.

[3] TAYLOR, John R. An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements. 2. ed. Sausalito, California: University Science Books, 1997.

[4] Raymond A. Serway. Physics for Scientists and Engineers, second ed. [S.l.]: Saunders College Publishing, 1986.

[5] WALKER, Jearl. Fundamentos de Física 10 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.